Краткие сообщения ОИЯИ №7-85 JINR Rapid Communications No. 7-85
УДК 539.12.01

К ВОПРОСУ ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ ПОКОЛЕНИЙ ЛЕПТОНОВ И КВАРКОВ

А.Б.Говорков

Все лептоны и кварки объединяются в одно спинорное гиперполе, построенное на системах неассоциативных гиперкомплексных постоктонионных чисел. Появление последовательных поколений лептонов и кварков связывается с процедурой Кэли-Диксона удвоения систем гиперчисел. Формулируется спонтанно-нарушенная $G_2 \times SU(2)_L \times U(1)$ калибровочная симметрия, и цветовая симметрия кварков $SU(3)_c$ объясняется как остающаяся ненарушенной подгруппа G_2 автоморфизмов постоктонионных гиперчисел. Число поколений в такой теории может составлять лишь 2^n $(n = 0,1,2,...)$.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

On the Algebraic Construction of Lepton-Quark Generations

A.B.Govorkov

All leptons and quarks are united into a spinor hyperfield constructed over systems of nonassociative hypercomplex post-octonion numbers. Arising of successive lepton-quark generations is connected with the Cayley-Dickson iterative process for hypernumber systems. Spontaneously broken $G_2 \times SU(2)_L \times U(1)$ gauge symmetry is formulated and the colour $SU(3)_c$ quark symmetry is explained as the unbroken subgroup of G_2, the broken automorphism group of postoctonion hypernumbers. The number of generations in this theory should be equal to 2^n $(n = 0,1,2,...)$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics.

В последние годы в физике элементарных частиц стали популярными представления о последовательно появляющихся поколениях фундаментальных частиц — лептонов и кварков. В настоящее время после открытия t -кварка известно три целиком заполненных поколения, состоящих из следующих лептонов и кварков: ν_e, e, u, d; ν_μ, μ, c, s; ν_τ, τ, t, b. Самым замечательным свойством этой последовательности является точная повторяемость (по крайней мере, известных) свойств лептонов и кварков при переходе от одного поколения к другому: копирование электрических зарядов и электрослабых взаимодействий (с учетом смешивания кварков из разных поколений), одинаковость цветовых свойств кварков и совершенство цветовой $SU(3)_c$-симметрии. Единственное пока что известное различие заключается в увеличении масс частиц (возможно, за исключением масс нейтрино). В связи с этим предлагались различные теоретические схемы, основанные на применении калибровочных "фамильных" групп, когда собственным значениям одного из генераторов сопоставлялись номера поколений.

Правомерен, однако, иной, алгебраический подход к описанию внутренних симметрий элементарных частиц, который не предполагает заранее наличия каких-либо фиктивных внутренних пространств, отвечающих новой степени свободы (например, номеру поколения), но связывает наличие последней скорее с определенными алгебраическими свойствами единого поля, описывающего все частицы сразу.

Гюрсей /1/ (см. также /2/) предложил описывать совокупность одного лептона и одного цветного кварка посредством гиперполя, построенного на октонионах

$$\psi(x) = \lambda(x)u_0^* + \vec{Q}(x)\cdot\vec{u}^* + \lambda^*(x)u_0 + \vec{Q}^*(x)\cdot\vec{u}, \qquad (1)$$

где u_0, u_A $(A = 1,2,3)$ — октонионные единицы в расщепленном базисе, а $\lambda(x)$ и $Q_A(x)$ — дираковские поля для лептона и цветных кварков. (λ^* и Q_A^* — комплексно-сопряженные поля. Используется майорановское представление, в котором комплексное и зарядовое сопряжения совпадают). Конструкцию (1) будем называть "октополем".

Возникает естественное желание расширить эту конструкцию таким образом, чтобы она включала, по крайней мере, целое поколение (= два лептона + два цветных кварка), а как осуществление конечной цели — все поколения лептонов и кварков. Гюрсей /3/ предложил такое обобщение на основе исключительной йордановской алгебры над октонионами и пришел к рассмотрению исключительных картановских групп как фундаментальных групп симметрии лептонов и кварков. В такой схеме количество лептонов и кварков ограничено.

В данной заметке указывается на другую, более непосредственную возможность обобщения конструкции (1), основанную на удвоении систем гиперкомплексных чисел (гиперчисел) путем последовательного применения процедуры Кэли-Диксона (см. /4,5/; очень кратко эта процедура описана в конце настоящей заметки). Так, при удвоении октонионов получается система, которую мы будем называть диоктонионами, а построенное на ней диоктополе имеет вид

$$\psi(x) = \nu(x)\, u_0^* + \vec{u}(x) \cdot \vec{u}^* + e(x)\, U_0^* + \vec{d}(x) \cdot \vec{U}^* + \text{к.с.} \qquad (2)$$

и содержит полное первое поколение лептонов и кварков. Повторив процедуру удвоения, получим систему ди-диоктонионов и основанное на ней ди-диоктополе, содержащее уже два поколения лептонов и кварков: ν_e, e, $\vec{u}$, $\vec{d}$; ν_μ, μ, $\vec{e}$, $\vec{s}$. Однако следующее удвоение должно привести сразу к четырем поколениям и первое предсказание этой процедуры заключается в том, что число поколений не может остановиться на известных к настоящему времени трех, но должно обязательно существовать четвертое поколение. Если мы продолжим удвоение, то следующий шаг приведет нас сразу к восьми поколениям, а дальнейшие шаги поведут к катастрофическому росту их числа.

Замечательным свойством всех таких систем постоктонионных гиперчисел является то, что группой автоморфизмов для любой из них, начиная с октонионов, является исключительная картановская группа G_2 (14 параметров, ранг 2)/4/. При этом преобразования, принадлежащие к этой группе, совершаются автономно для отдельных пар лептонов и кварков

$$(\nu_e, \vec{u}),\ (e, \vec{d}),\ (\nu_\mu, \vec{c}),\ (\mu, \vec{s}) \ \text{и т.д.} \qquad (3)$$

и каждая такая пара образует 7-мерное представление G_2. Руководствуясь калибровочным принципом, можно потребовать инвариантность теории относительно *локальных* автоморфизмов G_2. Тогда возникают следующие калибровочные векторные поля: комплексное цветное поле лепто-кварков $\vec{y}_\mu$, определяющее переходы между лептоном и кварком из одной и той же пары (3), и восемь вещественных глюонных полей, взаимодействующих только с кварками. Для включения механизма Хиггса спонтанного нарушения калибровочной G_2-симметрии наряду с исходным спинорным гиперполем предполагается наличие также скалярного гиперполя с повторением компонент

$$\phi(x) = \phi_0(x)\, u_0^* + \vec{\phi}(x) \cdot \vec{u}^* + \phi_0(x)\, U_0^* + \vec{\phi}(x) \cdot \vec{U}^* + \text{к.с.} \qquad (4)$$

Гамильтониан такого поля предполагается имеющим спонтанно-нарушенный вид. Используя физическую калибровку, можно исключить цветные компоненты $\vec{\phi}$, а поле ϕ_0 превратить в *чисто мнимое.* В такой калибровке возникает единственный массивный скалярный хиггсовский мезон, лепто-кварки $\vec{y}_\mu$ приобретают массу, а глюоны остаются безмассовыми. Таким образом, группа G_2 локальных автоморфизмов для всех пар "лептон-кварк" из (3) нарушается единым образом, а ее цветовая подгруппа $SU(3)_c$ остается ненарушенной и действующей для всех цветных кварков одинаково: данная конструкция естественным образом объясняет наличие у кварков (и отсутствие у лептонов) цветовой степени свободы и совершенство связанной с нею цветовой симметрии $SU(3)_c$.

Начиная с диоктонионов, можно, помимо группы автоморфизмов, рассмотреть также группу электрослабых взаимодействий и в качестве полной калибровочной симметрии принять прямое произведение

$$G_2 \times SU(2)_L \times U(1). \tag{5}$$

Отметим, что, в отличие от G_2, группа электрослабых взаимодействий связывает компоненты гиперполя из разных лептон-кварковых пар. Как обычно, ее дублетами являются (ν_L, e_L), $(\vec{u}_L, \vec{d}_L)$ и т.д., а синглетами — e_R, $\vec{u}_R$, $\vec{d}_R$ и т.д. Обычным образом вводятся калибровочные поля $W^{\pm}_{\mu}$, Z^{0}_{μ} и $A^{\text{э.м.}}_{\mu}$. Для спонтанного нарушения электрослабых взаимодействий необходимо, помимо (4), предположить наличие другого скалярного хиггсовского диоктополя

$$\xi(x) = \xi_0(x)\, u_0^* + \vec{\xi}(x) \cdot \vec{u}^* + \Xi_0^-(x)\, U_0^* + \vec{\Xi}^-(x) \cdot \vec{U}^* + \text{к.с.} \tag{6}$$

Используя G_2-инвариантность, можно, в принципе, выбрать такую калибровку, в которой векторные компоненты $\vec{\xi}$ и $\vec{\Xi}^-$ будут отсутствовать. Однако она может не совпадать с калибровкой, использованной выше для устранения поля $\vec{\phi}$. При переходе к последней у поля (6) вновь возникнут цветные компоненты, пропорциональные параметрам перехода $\vec{y}$:

$$\vec{\xi} = i\vec{y}\,(\xi_0 - \xi_0^*), \quad \vec{\Xi}^- = i\vec{y}\,(\Xi_0^- - \Xi_0^{-*}). \tag{7}$$

Но теперь можно воспользоваться $SU(2)_L \times U(1)$ -калибровочной инвариантностью и, как обычно, устранить компоненту Ξ_0^-, а компоненту ξ_0 сделать *чисто вещественной*. В этом случае выражения (7) автоматически обращаются в нуль, а поле (6) содержит лишь одну вещественную компоненту ξ_0, т.е. превращается из гиперполя в обычное поле. В результате мы приходим к обычной теории Глэшоу-Салама-Вайнберга.

Делая следующий шаг и переходя к ди-диоктонионам, т.е. к двум поколениям лептонов и кварков, мы не увеличиваем число хиггсовских скалярных полей, но лишь повторяем компоненты (4) четыре раза, а компоненты (6) — дважды. При этом, однако, кварковые поля, входившие в исходное спинорное ди-диоктополе типа (2), могут смешиваться в слабых левокиральных дублетах и правокиральных синглетах, как это принято в схеме Кабиббо-Глэшоу-Иллиопулоса-Майани. Аналогичную картину мы получаем и при следующем удвоении, при котором, однако, появляется сразу четыре поколения, и поэтому вместо схемы смешивания кварков Кобаяши-Маскава для трех поколений следует рассматривать более общую схему смешивания четырех поколений кварков.

В данной теории поколений пока что нет "настоящего" объединения всех взаимодействий на основе какой-либо простой группы "великого объединения". Принципиально имеется возможность рассматривать калибровочные симметрии $SO(2^n)$ ($n = 3,4,5,\dots$ соответственно для октонионов, диоктонионов, дидиоктонионов и т.д.) преобразований всех вещественных (майорановских) полей, входящих в состав исходных спинорных полей типа (1), (2) и т.д. Так, для четырех поколений мы будем иметь группу $SO(64)$. В этом случае, однако, возникает серьезная проблема иерархии нарушений такой большой симметрии в рамках хиггсовских гиперполей.

Следует также подчеркнуть, что в данной схеме фундаментальными предполагаются лишь спинорное и хиггсовские скалярные гиперполя, тогда как калибровочные поля возникают как производные из требования локальной калибровочной инвариантности. Вопрос о формулировке калибровочных полей в терминах гиперполей, равно как и вопрос о формулировке юкавского взаимодействия между спинорным и скалярными гиперполями, ответственного за возникновение масс у фермионов, выходят за пределы данной заметки.

В заключение приведем краткую формулировку процедуры Кэли-Диксона — удвоения гиперкомплексных систем /4,5/. Пусть задана таблица умножения "старых" гиперкомплексных единиц:

$$e_i e_j = -\delta_{ij} + f_{ijk}\, e_k, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Коэффициенты f_{ijk} антисимметричны и однозначны, т.е. при заданных i и j может существовать лишь единственное значение k, при котором $f_{ijk} \neq 0$. Вводится новая гиперкомплексная единица e, такая, что $e^2 = -1$, а ее умножение на старые гиперединицы антисимметрично. Теперь можно определить N "новых" гиперкомплексных единиц:

$$E_i = e e_i = -e_i e, \quad i = 1, \dots, N.$$

Для них принимается следующая таблица умножения:

$$e E_i = -E_i e = -e_i, \quad e_i E_j = -E_j e_i = -e(e_i e_j), \quad E_i E_j = e_j e_i.$$

Таким образом, определена полная таблица умножения для всех $2N+1$ новых и старых гиперкомплексных единиц вместе. Для полученной удвоенной системы гиперкомплексных чисел продолжают выполняться следующие свойства: антисимметрия и однозначность коэффициентов f_{ijk}, инволюция (изменение знака всех гиперединиц на противоположный), гибкость (подразумевающая возможность построения степенных рядов) и автоморфизм G_2. Приведем также пример построения расщепленного базиса для диоктонионов при помощи мнимой единицы i, коммутирующей со всеми гиперединицами:

$$u_0 = 1 + ie_7, \quad u_A = e_A + ie_{A+3}, \quad U_0 = e + iE_7,$$

$$U_A = E_A + iE_{A+3}, \qquad A = 1, 2, 3.$$

Автор выражает глубокую признательность В.И.Огиевецкому и И.В.Полубаринову за обсуждение затронутых здесь вопросов.

Литература

1. Gursey F. Proc. "Johns Hopkins Workshop on Current Problems in High Energy Particle Theory". Johns Hopkins Univ.,1974,p.15.
2. Casalbuoni R., Domokos C., Kovesi-Domokos S. Nuovo Cim., 1976, 31A, p.423.
3. Gursey F. Proc. Kyoto Int. Symp. on Math. Phys. Springer, 1976, p.225.
4. Schafer R.D. Amer.J.Math., 1954, 76, p.435.
5. Polubarinov I.V. JINR, E2-84-654, Dubna, 1984.

Рукопись поступила 6 марта 1985 года.